

Problemas de transporte y problemas de transporte con carga fija



Manuel García Narváez
Trabajo de fin del grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Introducción

Entre los problemas más interesantes en el campo de la Investigación Operativa, tanto por sus aplicaciones como por los retos teóricos que presentan, figuran los que aparecen en el diseño de redes de distribución. Estos problemas pueden incluir, entre otras variantes, el problema de transporte, el problema del viajante, el problema de rutas de vehículos con uno o varios almacenes, los problemas de localización de infraestructuras con y sin problemas de rutas asociados, etc.

El problema de transporte y el problema de transporte con carga fija son problemas de programación lineal y programación lineal entera, respectivamente, es decir, son problemas de optimización en los que se trata de maximizar (o minimizar) una función lineal, sujetos a unas determinadas restricciones que son ecuaciones o inecuaciones lineales que, además, en el caso de programación entera, incluyen variables que han de ser enteras. Una de las razones que justifican el estudio individualizado de estos problemas es que tienen una estructura matemática especial que ha permitido diseñar métodos de resolución más eficientes que los que se aplican a los problemas de programación lineal. Hay que tener en cuenta que los problemas de transporte tienen, en general, un gran número de variables y restricciones incluso en sistemas de distribución no especialmente complejos. Además, ambos problemas tienen aplicaciones en muchos campos, siendo especialmente importantes en el diseño del proceso de distribución en una cadena de suministro.

El objetivo de este trabajo es estudiar el problema de transporte y el problema de transporte con carga fija, demostrar sus propiedades más relevantes y presentar algunos de los algoritmos que se han propuesto para su resolución, además de mostrar algún caso particular del problema de transporte con carga fija.

Este trabajo consta de tres capítulos. En el **Capítulo 1** se estudia el problema de transporte. Tras formularlo matemáticamente, se demuestran algunos resultados basados en las propiedades de la matriz de coeficientes y se presenta un método de resolución basado en el conocido algoritmo simplex. En el **Capítulo 2** se estudia el problema de transporte con carga fija. Se formula como un problema de programación entera con variables binarias y se demuestran algunas propiedades que permiten relacionar su solución con la solución del problema de transporte obtenido cuando se relajan las restricciones de integridad de las variables binarias. A continuación, se presentan algunos algoritmos propuestos en la literatura para resolver el problema basados en distintas reformulaciones del mismo. El **Capítulo 2** termina con una revisión bibliográfica actualizada sobre el problema. En el **Capítulo 3** se estudia algún caso particular del problema de transporte con carga fija y algunas propiedades adicionales. Por último, en el apéndice se proporcionan los resultados de un breve estudio computacional en el que se han resuelto, usando Lingo, algunos problemas de transporte con carga fija generados aleatoriamente.

Índice general

Introducción	III
1. El problema de transporte	1
1.1. Planteamiento	1
1.1.1. Formulación	1
1.1.2. Problema de transporte no balanceado	4
1.1.3. Propiedades de la matriz de coeficientes	4
1.2. Algoritmo simplex para el problema de transporte	6
1.2.1. Construcción de una solución inicial	7
1.2.2. Cálculo de los costes marginales de la solución	8
1.2.3. Construcción de una nueva solución	8
2. El problema de transporte con carga fija	9
2.1. Introducción	9
2.2. Formulación	9
2.3. El problema de programación lineal con carga fija	10
2.4. Un método aproximado de resolución	12
2.5. Evaluación del método aproximado de Balinski	14
2.6. Un algoritmo basado en el procedimiento de Benders	15
2.7. Un algoritmo basado en fijar las variables binarias	18
2.8. Revisión bibliográfica actualizada	20
3. Casos particulares y propiedades del problema de transporte con carga fija	21
3.1. El problema de transporte con carga fija puro	21
3.2. El problema de asignación de profesores	23
3.3. La paradoja de más por menos	26
A. Resultados computacionales	29
Bibliografía	31

Capítulo 1

El problema de transporte

1.1. Planteamiento

El problema de transporte fue formulado tal y como lo conocemos en 1941 por el matemático americano Frank Lauren Hitchcock en su artículo "*The distribution of a product from several sources to numerous localities*", por lo que otro nombre que se le da es problema de Hitchcock. Sin embargo, sobre 1939, Leonid Kantorovich ya había mostrado diversas aplicaciones de problemas muy relacionados con el problema de transporte, además de formular el problema de transporte en forma continua. También trabajó en el problema, de manera independiente, Tjalling Koopmans, dado que trabajaba en el transporte de mercancías durante la Segunda Guerra Mundial, y quería reducir costes de transporte. No fue hasta 1951 cuando George Dantzig adaptó el método simplex que él mismo había creado para resolver el problema de transporte de una manera eficiente que perdura en la actualidad.

1.1.1. Formulación

Consideramos m orígenes (lugares que ofrecen un determinado producto), que denotamos O_i , $i = 1, \dots, m$. Cada origen O_i tiene una oferta de s_i unidades de dicho producto. Consideramos n destinos (lugares que demandan el producto), que denotamos D_j , $j = 1, \dots, n$. Cada destino D_j tiene una demanda de d_j unidades del producto. Podemos suponer que $s_i, d_j > 0$ (si no, se deja de considerar el origen o destino correspondiente). También supondremos que el problema está balanceado, es decir, la oferta total es igual a la demanda total:

$$\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

Sea c_{ij} el coste por unidad de producto enviada desde O_i hasta D_j . En general, $c_{ij} > 0$, aunque podría ser $c_{ij} \leq 0$ si, por ejemplo, se quiere incentivar el uso de la ruta desde i hasta j .

El problema de transporte tiene por objetivo determinar cómo debe realizarse la distribución de producto de manera que minimice el coste total asociado a enviar el producto desde los orígenes hasta los destinos.

Si denotamos x_{ij} a las unidades de producto enviadas desde O_i hasta D_j , el problema de transporte se puede formular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
&\text{sujeto a} && x_{11} + \cdots + x_{1n} && = s_1 \\
&&& && x_{21} + \cdots + x_{2n} && = s_2 \\
&&& && \vdots && \\
&&& && x_{m1} + \cdots + x_{mn} && = s_m \\
&&& x_{11} &+& x_{21} &+& \cdots &+& x_{m1} && = d_1 \\
&&& \vdots && \vdots && \vdots && \vdots && \\
&&& && x_{1n} &+& x_{2n} &+& \cdots &+& x_{mn} && = d_n \\
&&& x_{ij} \geq 0, && i = 1, \dots, m, && j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

o, en forma abreviada:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
&\text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{oferta de } O_i) \\
&&& \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{demanda de } D_j) \\
&&& x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \quad (\text{no negatividad})
\end{aligned}$$

El problema de transporte es un problema de optimización lineal y, por lo tanto, puede resolverse con los algoritmos que se han desarrollado para este tipo de problema (algoritmo simplex [7, 10, 20], punto interior, etc). No obstante, las características del problema de transporte que estudiaremos a continuación han permitido adaptar el algoritmo simplex para hacerlo más eficiente.

Como se puede observar, el problema tiene $m \times n$ variables (x_{ij}) y $m + n$ restricciones (excluyendo las de no negatividad). Cada variable aparece solamente dos veces en las restricciones (una en la restricción de oferta y otra en la de demanda), ambas con coeficiente 1. Esta propiedad tendrá gran importancia en el desarrollo de un algoritmo eficiente para la resolución del problema.

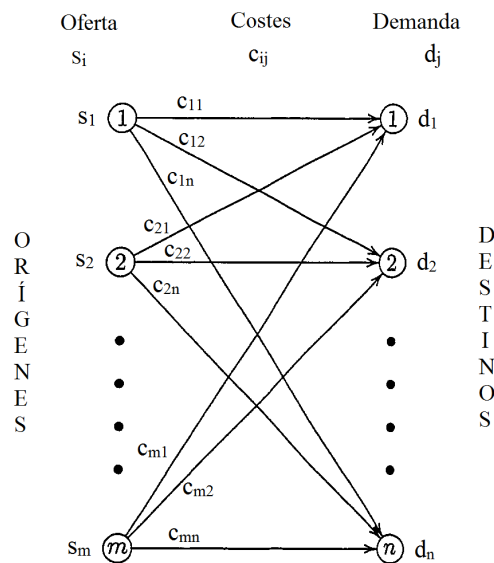


Figura 1.1: Grafo de un problema de transporte

El grafo del problema de transporte (formado por los orígenes, los destinos y sus conexiones) es bipartito y completo; esto es, los nodos (orígenes y destinos) forman dos conjuntos tales que todas las conexiones van de un conjunto al otro; y además todas las conexiones (entre orígenes y destinos) son posibles. En la [Figura 1.1](#) se muestra este grafo.

Si una determinada conexión no existiera en el sistema real modelado, para plantear el problema se asociaría a la conexión inexistente una variable artificial, con un coeficiente en la función objetivo M , siendo M una constante suficientemente grande.

El problema de transporte puede representarse con una tabla $m \times n$ que muestra en cada iteración del algoritmo de resolución s_i , d_j , c_{ij} y la solución factible básica (s.f.b.) considerada. Las filas representan los orígenes y las columnas los destinos. La casilla de la fila i y columna j contiene los valores x_{ij} y c_{ij} . Esta tabla permitirá resolver el problema de transporte sin necesidad de usar las tablas del algoritmo simplex lo que, como ya se ha señalado, hace el método más sencillo y eficiente. Una posible forma detallada de dicha tabla puede verse en la [Figura 1.2](#). En adelante la llamaremos tabla de transporte.

min	D_1	...	D_n	
O_1	x_{11}	...	x_{1n}	s_1
	c_{11}	...	c_{1n}	
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
O_m	x_{m1}	...	x_{mn}	s_m
	c_{m1}	...	c_{mn}	
	d_1		d_n	

Figura 1.2: Tabla del problema de transporte

Para representar el problema de transporte en forma matricial, definimos los siguientes vectores y matrices:

$$X = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{mn})^t$$

$$c = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{mn})$$

$$b = (s_1, s_2, \dots, s_m, -d_1, -d_2, \dots, -d_n)^t$$

$$A = (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}, A_{21}, \dots, A_{2n}, \dots, A_{mn})$$

donde $A_{ij} = e_i - e_{m+j}$, siendo e_k un vector de \mathbb{R}^{m+n} con un 1 en el lugar k , y el resto ceros.

Con estas notaciones, la formulación matricial del problema de transporte es:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && cX \\ &\text{sujeto a} && AX = b \\ &&& X \geq 0 \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes A del problema de transporte tiene dimensión $(m+n) \times mn$, y tiene la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1_n & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & 1_n & \dots & 0_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0_n & 0_n & \dots & 1_n \\ -I_n & -I_n & \dots & -I_n \end{pmatrix}$$

donde 1_n y 0_n son vectores $1 \times n$ con todo unos y con todo ceros, respectivamente, e I_n es la matriz identidad $n \times n$.

Las propiedades de esta matriz hacen del problema de transporte un problema con estructura especial. Por ello las estudiaremos en detalle más adelante. Pero antes, nos planteamos si el problema de transporte es factible, es decir, si tiene solución. Suponiendo que el problema está balanceado, la respuesta es afirmativa.

Proposición 1.1.1. *El problema de transporte es factible si y sólo si está balanceado.*

Demostración: Sea $d = \sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j$, y sean

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{s_i d_j}{d}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Es inmediato comprobar que $\{\tilde{x}_{ij}\}$ es una solución factible del problema de transporte.

Por otro lado, si el problema es factible, $\sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i$ y $\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j$ implican que

$$\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n d_j$$

□

Observación 1.1.2. De las restricciones del problema de transporte, se deduce que es acotado: $0 \leq x_{ij} \leq \min \{s_i, d_j\}$. Esta propiedad junto con el hecho de que el problema tiene solución factible, nos permite afirmar que el problema de transporte tiene solución óptima.

1.1.2. Problema de transporte no balanceado

Caso 1: $\sum_{i=1}^m s_i > \sum_{j=1}^n d_j$.

Para balancear el problema, creamos un destino ficticio D_{n+1} con demanda $d_{n+1} = \sum_{i=1}^m s_i - \sum_{j=1}^n d_j$. Las variables $x_{i,n+1}$ representan la cantidad de oferta del origen O_i que se queda sin distribuir. Además, en general, $c_{i,n+1} = 0$.

Caso 2: $\sum_{i=1}^m s_i < \sum_{j=1}^n d_j$.

El problema original no es factible, ya que no se puede satisfacer toda la demanda con la oferta disponible. Sin embargo, podemos plantearnos resolver cómo distribuir toda la oferta disponible con el mínimo coste. Para ello, creamos un origen ficticio O_{m+1} con oferta $s_{m+1} = \sum_{j=1}^n d_j - \sum_{i=1}^m s_i$. Las variables $x_{m+1,j}$ representan la cantidad de demanda del destino D_j que no se satisface. Además, en general, $c_{m+1,j} = 0$.

1.1.3. Propiedades de la matriz de coeficientes

Proposición 1.1.3. *El rango de la matriz A es $m + n - 1$.*

Demostración: El resultado se obtiene directamente manipulando la matriz A .

$$A = \begin{pmatrix} 1_n & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & 1_n & \dots & 0_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0_n & 0_n & \dots & 1_n \\ -I_n & -I_n & \dots & -I_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0_n & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & 1_n & \dots & 0_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0_n & 0_n & \dots & 1_n \\ -I_n & -I_n & \dots & -I_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -I_n & -I_n & \dots & -I_n \\ 0_n & 1_n & \dots & 0_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0_n & 0_n & \dots & 1_n \\ 0_n & 0_n & \dots & 0_n \end{pmatrix}$$

En el primer paso se suma a la primera fila la suma de las restantes $m + n - 1$ filas. En el segundo paso simplemente se reordena la matriz. \square

Como consecuencia de la **Proposición 1.1.3**, el número de variables básicas de una s.f.b. del problema de transporte es $m + n - 1$.

Proposición 1.1.4. *La matriz A es totalmente unimodular, esto es, toda submatriz cuadrada de A tiene determinante $-1, 0$ ó 1 .*

Demostración: Por inducción sobre la dimensión k de la submatrices cuadradas de A .

Si $k = 1$, la propiedad se cumple trivialmente.

Supongamos cierta la propiedad para todas las submatrices hasta la dimensión $k - 1$, con $k \geq 2$. Sea A_k una submatriz $k \times k$ de A . Debemos ver que $\det(A_k) = -1, 0$ ó 1 . Por su particular estructura, puede ocurrir:

Caso 1: Alguna columna de la submatriz está formada por ceros, en cuyo caso $\det(A_k) = 0$.

Caso 2: Alguna columna está formada por un sólo elemento no nulo, en cuyo caso, desarrollando por menores el determinante, se tiene que

$$\det(A_k) = \pm \det(A_{k-1})$$

y aplicando inducción se tiene el resultado.

Caso 3: Si no ocurre ninguno de los casos anteriores, entonces toda columna de A_k tiene un 1 y un -1 . Por tanto, todas sus filas suman cero, y se tiene que $\det(A_k) = 0$. \square

Corolario 1.1.5. *Si las ofertas y las demandas de un problema de transporte son valores enteros, entonces ese problema tiene una solución óptima entera.*

Demostración: Es inmediato sin más que resolver con el método simplex el problema de transporte con ofertas y demandas de valores enteros, teniendo en cuenta que A es totalmente unimodular y la regla de Cramer. \square

Observación 1.1.6. Notemos que la matriz B , base asociada a una s.f.b., tiene determinante igual a -1 ó 1 , ya que es una submatriz cuadrada de A y es regular. Por otro lado, del vector transformado Y_{ij} , que es clave en el desarrollo del algoritmo simplex, pues permite identificar la variable que deja la base, y que se obtiene de la expresión $BY_{ij} = A_{ij}$, se deduce fácilmente que está formado por los valores $-1, 0$ y 1 , sin más que aplicar la **Proposición 1.1.4** y la regla de Cramer. Esta propiedad simplifica los cálculos que hay que realizar al aplicar el algoritmo y permite que la estructura general de la tabla de transporte sea la misma en todas las iteraciones.

Teorema 1.1.7. *Una base B del problema de transporte es triangular (tras una adecuada permutación de sus filas y columnas).*

Demostración: Sea B una base del problema de transporte al aplicar el método simplex de resolución. Supongamos que el número de elementos no nulos de B es mayor o igual que $2(m + n - 1)$. Como B tiene a lo sumo dos elementos no nulos en cada columna, y es una matriz $(m + n - 1) \times (m + n - 1)$, ello implicaría que cada columna de B tiene dos elementos no nulos, que son $+1$ y -1 , y por tanto la suma de sus filas sería cero, lo cual contradice que B sea base. Por tanto, el número de elementos no nulos de B es menor que $2(m + n - 1)$. Así pues, existe una fila de B con un único elemento no nulo. Eliminando dicha fila y la columna que contenía el único elemento no nulo se genera una submatriz de B , a la que se le puede aplicar el mismo argumento. Y así, repitiendo el proceso, se deduce que B es triangular. \square

El **Teorema 1.1.7.** se conoce como el *Teorema Fundamental del Problema de Transporte*. Como consecuencia tenemos que, al aplicar el método simplex al problema de transporte, es posible resolver de forma muy simple y eficiente, a través de la tabla de transporte, los sistemas de ecuaciones $BX_B = b$ y $BY_{ij} = A_{ij}$, siendo X_B el vector de variables básicas.

1.2. Algoritmo simplex para el problema de transporte

Debido a las propiedades del problema de transporte probadas anteriormente, el algoritmo simplex tiene una estructura más sencilla, que no precisa el uso de la tabla clásica de este algoritmo. La estructura general del algoritmo simplex para el problema de transporte es la siguiente:

Paso 1: Encontrar una s.f.b.

Paso 2: Calcular los costes marginales de la s.f.b. actualmente considerada.

Paso 3: Si no hay optimalidad, obtener una nueva s.f.b. y volver al **Paso 2**

Antes de explicar cada uno de los pasos, introducimos algunos conceptos que usaremos y que justificarán los pasos seguidos.

Definición 1.2.1. *Un conjunto de variables de la tabla de transporte se dice linealmente independiente si los vectores columna de A asociados a esas variables son linealmente independientes. En otro caso, se dice linealmente dependiente.*

Notemos que una s.f.b. es un conjunto de variables linealmente independiente.

Definición 1.2.2. *Un δ -ciclo es un conjunto de variables de la tabla de transporte tal que:*

- *Es no vacío.*
- *Contiene 0 ó 2 variables en cada fila y columna de la tabla.*
- *Ningún subconjunto suyo satisface las dos primeras propiedades.*

Teorema 1.2.3. *Un conjunto de variables de la tabla de transporte que forma un δ -ciclo es linealmente dependiente.*

Demostración: Asignamos $+\delta$ y $-\delta$ en las variables del δ -ciclo, alternativamente, y ceros en el resto de las variables. Cuando $\delta = 1$, la suma de las filas y columnas de la tabla es cero, por definición de δ -ciclo. Considerando la matriz A se deduce el resultado. □

Para demostrar el recíproco del **Teorema 1.2.3.**, necesitamos un resultado previo:

Proposición 1.2.4. *Un conjunto de variables Δ no vacío de la tabla de transporte que no contiene δ -ciclos satisface que:*

1. *Existe una fila o columna de la tabla que contiene una única variable de Δ .*
2. *Todo subconjunto de variables no vacío de Δ satisface la anterior propiedad.*

Demostración: Supongamos que Δ no satisface la primera propiedad. Elegimos una variable de Δ , x_{i_1, j_1} , y le asignamos $+\delta$. Por hipótesis, debe haber otra variable de Δ en la fila i_1 , x_{i_1, j_2} , a la que asignamos $-\delta$. Dejamos de considerar más variables de Δ en la fila i_1 . Ahora, al igual que antes, debe haber otra variable de Δ en la columna j_2 , x_{i_2, j_2} , a la que asignamos $+\delta$. Dejamos de considerar más variables de Δ en columna j_2 . Repitiendo el proceso hasta llegar nuevamente a la columna j_1 , formamos un δ -ciclo en Δ , lo que contradice la hipótesis.

Como Δ no contiene δ -ciclos, tampoco sus subconjuntos, por lo que les podemos aplicar lo anterior, y probar así la segunda propiedad. □

Ahora vamos a demostrar el recíproco del **Teorema 1.2.3.**:

Teorema 1.2.5. *Un conjunto de variables Δ en la tabla de transporte que no contiene δ -ciclos es linealmente independiente.*

Demostración: Si Δ es vacío, es trivial. Supongamos que Δ es no vacío y linealmente dependiente. Por tanto, existe una combinación lineal no nula de vectores columna de A que es igual a cero. Asignamos el coeficiente de dicha combinación a la variable de Δ correspondiente, y ceros al resto, en la tabla. Como la combinación de los vectores columna es el vector cero, tenemos que la suma de cada fila y columna de la tabla es cero. El subconjunto de Δ formado por las variables con asignaciones no nulas no satisface la primera propiedad del **Proposición 1.2.4.**, lo que contradice la hipótesis. \square

Observación 1.2.6. Como consecuencia del **Teorema 1.2.3.** y **Teorema 1.2.5.**, un conjunto de variables Δ de la tabla de transporte es linealmente independiente si y sólo si ningún subconjunto de Δ contiene δ -ciclos, lo cual equivale a que todo subconjunto (no vacío) de Δ satisface que existe una fila o columna de la tabla de transporte que contiene exactamente una variable del subconjunto.

Para justificar los pasos que se realizarán para obtener una nueva s.f.b. a partir de otra, se necesita el siguiente teorema:

Teorema 1.2.7. *Sea \mathcal{B} una s.f.b. en la tabla de transporte, y sea x_{pq} una variable no básica. Entonces, el conjunto de variables $\mathcal{B} \cup \{x_{pq}\}$ contiene exactamente un δ -ciclo, y tal δ -ciclo contiene la variable no básica x_{pq} .*

Demostración: Como \mathcal{B} es un conjunto de variables linealmente independiente, no contiene δ -ciclos, por lo que si $\mathcal{B} \cup \{x_{pq}\}$ contiene un δ -ciclo, este debe contener la variable x_{pq} . Ahora, veamos que existe tal δ -ciclo. Como $\mathcal{B} \cup \{x_{pq}\}$ está formado por $m+n$ variables, es linealmente dependiente, por lo que, aplicando la **Observación 1.2.6.**, contiene, al menos, un δ -ciclo. Aplicando álgebra lineal, se puede ver que es único. \square

A continuación damos una ideas generales sobre los pasos del algoritmo.

1.2.1. Construcción de una s.f.b. inicial

Notemos que es posible encontrar una s.f.b., sin necesidad de incluir variables artificiales, aplicando el siguiente lema:

Lema 1.2.8. *Dada una s.f.b., al menos una restricción del problema de transporte contiene una única variable básica.*

Demostración: Supongamos que todas las restricciones tuvieran, al menos, dos variables básicas. Sea k el número de variables básicas. Entonces, $k \geq 2m$, y también $k \geq 2n$, por lo que tendríamos que $k \geq m+n$. Sin embargo, sabemos que el número de variables básicas es $m+n-1$. \square

Basándose en este hecho, se han desarrollado diferentes criterios para seleccionar una variable básica: método de la esquina noroeste, método de mínimo coste, método Vogel, etc, que, usando los teoremas antes demostrados, garantizan encontrar una s.f.b. A la variable básica seleccionada por alguno de esos métodos le asignamos el mayor valor posible compatible con la oferta y la demanda actuales de su fila y columna. Si la variable toma el valor de la oferta, eliminamos del estudio la fila; si toma el valor de la demanda, eliminamos la columna. Después, actualizamos las ofertas y demandas y volvemos a seleccionar una nueva variable básica.

El proceso acaba cuando sólo queda una fila o columna que considerar. Entonces se seleccionan todas las variables todavía bajo consideración y se les asigna el único valor posible.

1.2.2. Cálculo de los costes marginales de la s.f.b.

Para que la s.f.b. actual sea óptima, los costes marginales deben ser mayores o iguales que cero (basta calcularlos para las variables no básicas, puesto que para las variables básicas valen cero).

Para calcular los costes marginales hay, básicamente, dos procedimientos: el método cíclico y el método de la variable dual. Este último, basado en el *Teorema de la holgura complementaria*, consiste en determinar los valores de las variables duales \tilde{u}_i , $i = 1, \dots, m$ (asociadas a las restricciones de oferta), y \tilde{v}_j , $j = 1, \dots, n$ (asociadas a las restricciones de demanda), a partir del sistema

$$\begin{cases} c_{ij} - \tilde{u}_i - \tilde{v}_j = 0, & \text{para } (i, j) \ni x_{ij} \text{ es variable básica} \\ \tilde{v}_n = 0 \end{cases}$$

La solución actual es óptima si $c_{ij} - \tilde{u}_i - \tilde{v}_j \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. En caso contrario se construye una nueva s.f.b. que mejora (o, al menos, no empeora) el valor de la función objetivo del problema.

1.2.3. Construcción de una nueva s.f.b.

Puesto que la actual s.f.b. no es óptima, debemos hallar una nueva. Para ello, siguiendo los pasos del método simplex, tenemos que determinar una variable no básica que entre en la base, y una variable básica que la deje.

La variable no básica x_{kl} que entra en la base es aquella que cumple que

$$c_{kl} - \tilde{u}_k - \tilde{v}_l = \min \{c_{ij} - \tilde{u}_i - \tilde{v}_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$$

siendo \tilde{u}_i y \tilde{v}_j los valores de las variables duales calculados anteriormente. Usando el [Teorema 1.2.7.](#), se construye el δ -ciclo correspondiente a dicha variable no básica.

Asignando δ a las variables en el δ -ciclo como en el [Teorema 1.2.3.](#), y llamando δ' al mínimo valor de las variables básicas del δ -ciclo a las que les corresponde $-\delta$, la variable básica que deja la base es aquella a la que le corresponde $-\delta$ y además tiene valor δ' . El resto de variables básicas del δ -ciclo aumentan o disminuyen su valor δ' , de acuerdo con el signo que tengan asignado en el δ -ciclo. Una vez obtenida la nueva s.f.b., volvemos al [Paso 2](#) para comprobar si es óptima.

Si en la solución óptima del problema de transporte alguna variable no básica tiene coste marginal cero en la tabla, entonces existe óptimo múltiple. Para hallar el conjunto de soluciones óptimas, en la tabla óptima, cada variable no básica con coste marginal cero entra en la base, obteniendo una nueva s.f.b. óptima. La combinación convexa de las s.f.b. así obtenidas proporciona todas las soluciones óptimas del problema.

Estos pasos son análogos, con los correspondiente cambios en los costes marginales, en el caso de que queramos maximizar la función objetivo en el problema de transporte.

Capítulo 2

El problema de transporte con carga fija

2.1. Introducción

El problema de transporte con carga fija (PTCF) es una extensión del problema de transporte estudiado en el [Capítulo 1](#). La principal diferencia de este problema con respecto al problema de transporte radica en que cada ruta (i, j) tiene asociado un coste fijo si se usa, independiente del número de unidades de producto que se envíen por ella. Este modelo es un caso particular del problema de programación lineal con carga fija, cuyo estudio se lleva a cabo introduciendo variables binarias que garantizan que se incurre en el coste fijo si y sólo si la ruta es utilizada para enviar unidades. El nuevo problema es un problema de programación entera que puede ser resuelto con las técnicas usuales [13, 21, 25]. No obstante, las particularidades del problema de transporte que subyacen en la formulación del PTCF han permitido identificar métodos de resolución más eficientes.

El problema de programación lineal con carga fija fue formulado por primera vez en 1954 por los matemáticos americanos Warren Hirsch y George Dantzig. No fue hasta 1961 cuando Michel Balinski formuló el problema tal y como se conoce en la actualidad. Sin embargo, el primer método para resolverlo data de 1964. A partir de entonces, han sido varios los algoritmos que se han ido proponiendo. Los primeros que se utilizaron fueron el método de planos de corte, introducido por Ralph Gomory y Václav Chvátal, y el método de ramificación y acotación. Ambos métodos utilizan el método simplex implícitamente.

2.2. Formulación

Hay varias maneras equivalentes de formular el PTCF. En esta sección se va a plantear de una forma que resulta intuitiva y fácilmente reconocible.

Sean $q_{ij} \geq 0$ el coste fijo (carga fija) asociado a la ruta (i, j) , e y_{ij} variables que toman el valor 0 ó 1, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Manteniendo el resto de las notaciones utilizadas en el [Capítulo 1](#), el PTCF se puede formular como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}x_{ij} + q_{ij}y_{ij}) \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \dots, n \\ & y_{ij} = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad x_{ij} > 0 \\ & y_{ij} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x_{ij} = 0 \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Si se utiliza la ruta (i, j) , es decir, $x_{ij} > 0$, entonces debemos asumir el coste fijo q_{ij} , por lo que

debemos tener que $y_{ij} = 1$, y viceversa. En cambio, si $x_{ij} = 0$, entonces no se utiliza la ruta (i, j) , por lo que debemos tener que $y_{ij} = 0$, y viceversa. Además, salvo indicación expresa, supondremos que el problema está balanceado.

El PTCF se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & cX + qY \\ \text{sujeto a} & AX = b \\ & y_{ij} = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad x_{ij} > 0 \\ & y_{ij} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x_{ij} = 0 \\ & X \geq 0 \end{array}$$

donde

$$q = (q_{11}, q_{12}, \dots, q_{mn})$$

El PTCF (y el problema de transporte) son casos particulares del problema de transporte cóncavo (PTC) [11]. Este problema tiene las mismas restricciones que el problema de transporte, pero se trata de minimizar la función objetivo $\sum_{ij} \phi_{ij}(x_{ij})$, siendo ϕ_{ij} una función cóncava. El PTC suele aparecer al considerar economías de escala. Haciendo uso de esta clase de problemas, se puede ver, al menos teóricamente, que cualquier problema de programación entera con coeficientes enteros puede formularse como un PTCF.

2.3. El problema de programación lineal con carga fija

El problema de programación lineal con carga fija, como hemos señalado anteriormente, fue estudiado por Hirsch y Dantzig en su artículo "*The fixed charge problem*" [16]. Aunque no resolvieron el problema, dedujeron algunas propiedades sobre su solución óptima.

El problema de programación lineal con carga fija formulado por Hirsch y Dantzig es:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{i=1}^n (\alpha_i x_i + \beta_i y_i) \\ \text{sujeto a} & PX = Q \\ & y_i = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad x_i > 0 \\ & y_i = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x_i = 0 \\ & X \geq 0 \end{array}$$

donde α_i, β_i son constantes, $i = 1, \dots, n$; $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ es el vector de variables de dimensión n ; Q es un vector de coeficientes de dimensión m , con $m < n$; y P es una matriz de coeficientes $m \times n$.

Hirsch y Dantzig proponen la siguiente interpretación de este problema. Consideremos una compañía que dispone de m máquinas, cada una de las cuales puede realizar cualquiera de n trabajos distintos. Sean c_{ij} y h_{ij} el coste y el tiempo empleado cuando la máquina j realiza la operación i sobre una unidad de producto, respectivamente. Sea q_{ij} el coste fijo asociado a preparar la máquina j para realizar la operación i (supondremos despreciable el tiempo invertido en esta actividad). Sea x_{ij} la cantidad de producto a la que la máquina j le realiza la operación i . Sea b_i la cantidad total de producto sobre la que hay que realizar la operación i . Sea c_j el total de horas de disponibilidad de la máquina j . Sea y_{ij} una variable binaria que toma el valor 1 si $x_{ij} > 0$ y 0 en caso contrario, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Entonces, el problema de minimizar el coste total asociado a que el producto reciba las operaciones necesarias será el siguiente problema de programación lineal con carga fija:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}x_{ij} + q_{ij}y_{ij}) \\
& \text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& && \sum_{i=1}^m h_{ij}x_{ij} = c_j, \quad j = 1, \dots, n \\
& && y_{ij} = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad x_{ij} > 0 \\
& && y_{ij} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x_{ij} = 0 \\
& && x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

El problema de programación lineal con carga fija es difícil de resolver en general. Sin embargo, en el caso particular de que las cargas fijas β_i sean todas iguales y no negativas, el problema se reduce a resolver un problema de programación lineal, como demuestra el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. Sean

$$\phi(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta \sum_{i=1}^n y_i, \quad \phi_1(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

con β constante no negativa, funciones a minimizar sujetas a las restricciones del problema de programación lineal con carga fija. Suponemos que Q no está generado por menos de m columnas de P (hipótesis de no degeneración). Entonces existe un punto extremo \hat{X} , con exactamente m componentes no nulas, en el que ϕ y ϕ_1 se minimizan. Además, si un punto con m componentes no nulas minimiza ϕ_1 , entonces también minimiza ϕ .

Demostración: Bajo la hipótesis de no degeneración, tenemos que cualquier vector X de dimensión n que cumpla que $PX = Q$ tiene al menos m componentes no nulas. Sea \mathcal{X} el conjunto de todos estos vectores X . Entonces, usando una desigualdad del mínimo y observando que $\sum_{i=1}^n y_i$ es el número de componentes no nulas del vector (x_1, \dots, x_n) , tenemos que

$$\min_{X \in \mathcal{X}} \phi(X) \geq \min_{X \in \mathcal{X}} \phi_1(X) + \beta \min_{X \in \mathcal{X}} \sum_{i=1}^n y_i \geq \min_{X \in \mathcal{X}} \phi_1(X) + m\beta \quad (2.1)$$

Como ϕ_1 es una función lineal, minimizar ϕ_1 respecto a las restricciones del problema con carga fija es un problema de programación lineal, por tanto, existe un punto extremo \hat{X} , con exactamente m componentes no nulas (por la hipótesis de no degeneración), que minimiza ϕ_1 . Tomando dicho punto y usando las desigualdades 2.1, tenemos que

$$\phi(\hat{X}) \geq \min_{X \in \mathcal{X}} \phi(X) \geq \min_{X \in \mathcal{X}} \phi_1(X) + m\beta = \phi_1(\hat{X}) + m\beta = \phi(\hat{X})$$

Por tanto, llegamos a que $\phi(\hat{X}) = \min_{X \in \mathcal{X}} \phi(X)$, lo cual prueba las dos partes del teorema. □

Como consecuencia del Teorema 2.3.1., es posible usar el método simplex para resolver el problema de programación lineal con carga fija cuando las cargas fijas son iguales y no negativas.

Hirsch y Dantzig también estudiaron una generalización del problema de programación lineal con carga fija, muy relacionado con el problema de transbordo. Las restricciones son las mismas que en el problema original, pero la función objetivo a minimizar es

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{r=1}^p \beta_r \delta \left(\sum_{i=(r-1)k+1}^{rk} x_i \right)$$

donde $n = kp$ (k es divisor de n); y $\delta(u)$ vale cero si u es cero, y uno si u es mayor que cero. Claramente, si $k = 1$ y $p = n$, tenemos ϕ . También se puede ver que el mínimo del problema de programación lineal con carga fija generalizado se alcanza en un punto extremo.

Teorema 2.3.2. *La solución óptima del problema de programación lineal con carga fija es un punto extremo.*

La demostración se puede encontrar en [16], y se puede demostrar usando variedades, o directamente con la definición de punto extremo, viendo que para todo vector X de n componentes existe un punto extremo X^* tal que $\phi(X^*) \leq \phi(X)$, siendo ϕ la función objetivo del problema de programación lineal con carga fija.

2.4. Un método aproximado de resolución

Como hemos señalado anteriormente, en 1961, el matemático americano Michel Balinski formula una solución aproximada del PTCF en su artículo "Fixed-cost transportation problems" [6].

Balinski formula el PTCF de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}x_{ij} + q_{ij}y_{ij}) \\
 &\text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 &&& \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 &&& 0 \leq x_{ij} \leq m_{ij}y_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\
 &&& 0 \leq y_{ij} \leq 1, \quad y_{ij} \text{ entero}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $m_{ij} = \min(s_i, d_j)$.

Esta formulación es equivalente a la presentada en la sección 2.2. En efecto, veamos que la tercera y la cuarta restricción hacen que se cumplan las restricciones sobre las variables y_{ij} .

Si $y_{ij} = 0$, por la tercera restricción, $x_{ij} = 0$. Si $x_{ij} > 0$, y_{ij} no puede ser cero por la tercera restricción y, para que se cumpla la cuarta, y_{ij} debe ser uno. Además, si $x_{ij} = 0$, y_{ij} puede ser cero o uno pero, como se está minimizando la función objetivo, será cero; y, por lo tanto, también se cumplirá el último requisito, que $y_{ij} = 1$ implica que $x_{ij} > 0$.

Antes de explicar la aproximación de Balinski, estudiaremos algunas propiedades del PTCF. La primera es que este problema posee una solución óptima entera, como demuestra el siguiente teorema.

Teorema 2.4.1. *Existe una solución (X, Y) del PTCF tal que X es entero.*

Demostración: Sea $(X^0, Y^0) = \{x_{ij}^0, y_{ij}^0\}$ una solución óptima del PTCF. Definimos el siguiente problema

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{ij}x_{ij} \\
 &\text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 &&& \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 &&& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $\tilde{c}_{ij} = c_{ij}$ si $y_{ij}^0 = 1$, y $\tilde{c}_{ij} = M$ si $y_{ij}^0 = 0$, con M una constante suficientemente grande. Entonces, X^0 es una solución óptima de (2.3). Por otro lado, este problema tiene una solución óptima entera X' , por ser un problema de transporte. Además, es inmediato comprobar que (X', Y^0) es una solución óptima del PTCF. □

Vamos a considerar el PTCF (2.2) sin las restricciones de integridad, que llamamos PTR (problema de transporte relajado):

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}x_{ij} + q_{ij}y_{ij}) \\
& \text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& && \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \dots, n \\
& && 0 \leq x_{ij} \leq m_{ij}y_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\
& && 0 \leq y_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Teorema 2.4.2. Si $(\bar{X}, \bar{Y}) = \{\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}\}$ es una solución óptima del **PTR**, entonces $\bar{x}_{ij} = m_{ij}\bar{y}_{ij}$.

Demostración: Si $\bar{y}_{ij} = 0$, entonces $\bar{x}_{ij} = 0$, y se cumple la condición. Si, por el contrario, $\bar{y}_{ij} > 0$, supongamos que no se cumple la condición del teorema, es decir, $\bar{x}_{ij} < m_{ij}\bar{y}_{ij}$. En este caso, podríamos encontrar un valor $\bar{y}'_{ij} < \bar{y}_{ij}$, que siguiera cumpliendo las restricciones del **PTR**, con menor valor de la función objetivo, contradiciendo que (\bar{X}, \bar{Y}) es una solución óptima del **PTR**. \square

En consecuencia, si tenemos una solución óptima del **PTR** $(\bar{X}, \bar{Y}) = \{\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}\}$, entonces $\bar{y}_{ij} = \bar{x}_{ij}/m_{ij}$. Por tanto, resulta natural plantearnos el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} + q_{ij}/m_{ij})x_{ij} \\
& \text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& && \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \dots, n \\
& && x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Este problema es fácil de resolver por ser un problema de transporte. Sea $\{x'_{ij}\}$ una solución óptima. A partir de ella podemos construir una solución factible del PTCF $\{x^*_{ij}, y^*_{ij}\}$, con

$$\begin{aligned}
x^*_{ij} &= y^*_{ij} = 0 && \text{si } x'_{ij} = 0 \\
x^*_{ij} &= x'_{ij}, y^*_{ij} = 1 && \text{si } x'_{ij} > 0
\end{aligned}$$

Esta solución factible $\{x^*_{ij}, y^*_{ij}\}$ es la que toma Balinski como aproximación a la solución óptima del PTCF. También podemos obtener una solución óptima $\{\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}\}$ del **PTR**, con

$$\bar{x}_{ij} = x'_{ij} \quad \text{e} \quad \bar{y}_{ij} = x'_{ij}/m_{ij}$$

por lo que resolver un **PTR** es equivalente a resolver un problema de transporte ordinario.

De las soluciones $\{x^*_{ij}, y^*_{ij}\}$ y $\{x'_{ij}\}$ podemos deducir unas cotas para el valor óptimo de la función objetivo del PTCF. Sea $\{x^0_{ij}, y^0_{ij}\}$ una solución óptima del PTCF. Definimos

$$\begin{aligned}
z^0 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}x^0_{ij} + q_{ij}y^0_{ij}) \\
z_+ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}x^*_{ij} + q_{ij}y^*_{ij}) \\
z_- &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} + q_{ij}/m_{ij})x'_{ij}
\end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que la función objetivo del problema (2.5) evaluada en $\{x'_{ij}\}$ tiene el mismo valor que la función objetivo del PTCF en $\{\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}\}$. Por tanto, como $\{x^0_{ij}, y^0_{ij}\}$ es una solución factible del **PTR**, se tiene que $z_- \leq z^0$. Además, como $\{x^*_{ij}, y^*_{ij}\}$ es una solución factible del PTCF, también se tiene que $z^0 \leq z_+$. Así pues,

$$z_- \leq z^0 \leq z_+ \tag{2.6}$$

Balinski usó esta aproximación en varios ejemplos. Sin embargo, como la solución exacta no era conocida, no fue posible compararla. El estudio y evaluación de esta aproximación la llevaron a cabo Robers y Cooper en un trabajo posterior.

2.5. Evaluación del método aproximado de Balinski

En 1976, Philip Robers y Leon Cooper publicaron el artículo titulado "*A study of the fixed charge transportation problem*" [22], en el cual evalúan el método de aproximación de Balinski para la solución del PTCF expuesto en la sección 2.4.

Dada la dificultad en aquel momento de encontrar la solución óptima para el PTCF en general, generaron una serie de problemas cuya solución óptima era conocida de antemano. Para analizar la solución proporcionada por el método de Balinski, utilizaron tres estadísticos, descritos en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1: Estadísticos

Nombre	Fórmula	Descripción
Índice de posición	$\frac{z^0 - z_-}{z_+ - z_-}$	Mide donde se encuentra z^0 en el intervalo $[z_-, z_+]$
Error porcentual	$100 \frac{z_+ - z^0}{z^0}$	Mide la diferencia entre la solución real y la aproximada
Anchura de intervalo porcentual	$100 \frac{z_+ - z_-}{z^0}$	Mide la anchura del intervalo $[z_-, z_+]$

Una vez analizados los resultados, se pudo observar que la cota inferior de la solución del PTCF, z_- , estaba muy por debajo de la solución real, por lo que, en general, no era un dato útil. También se comprobó que tanto el error porcentual como la anchura de intervalo porcentual eran grandes si el problema resuelto tenía cargas fijas grandes y, por el contrario, al disminuir las cargas, estos estadísticos disminuían también. Este hecho puede justificarse observando que, si $\{q_{ij}\}$ toman valores pequeños, el PTCF original y el problema (2.5) son similares.

Estos estadísticos también aumentan (no linealmente) cuando el tamaño del problema aumenta. Sin embargo, cuando la proporción entre m y n disminuye (hay muchos más destinos que orígenes), los estadísticos disminuyen. Intuitivamente, este hecho se justifica observando que, la demanda de un destino, al haber menos orígenes, puede ser satisfecha por un único origen en muchos casos en la solución óptima (ya que la solución tendrá como mucho $m + n - 1$ valores no nulos). En esos casos, $m_{ij} = \min(s_i, d_j) = x_{ij}^0$, y el coste de transportar de i a j es el mismo en los dos problemas, por lo que la solución del PTCF y del problema (2.5) será similar.

En general, se puede deducir que la aproximación de Balinski da buenas soluciones, pero Robers y Cooper desarrollaron una mejora de este procedimiento que proporciona mejores resultados (al menos no peores). La modificación propuesta comienza calculando la solución de Balinski, que sabemos que es un punto extremo. A continuación, se determinan las s.f.b. adyacentes a esta y se elige la de menor coste en la función objetivo. Si el coste es menor que en la s.f.b. actual se sustituye esta por aquella y se aplica de nuevo el procedimiento de determinación de sus soluciones adyacentes; en caso contrario, el procedimiento acaba y se toma como solución la última s.f.b. calculada con el procedimiento. Con este método, se obtiene la solución óptima en la mayoría de los problemas estudiados en el artículo [22].

2.6. Un algoritmo basado en el procedimiento de Benders

En 1964, Kurt Spielberg publicó el artículo "*On the fixed charge transportation problem*" [24], en el que se propone el primer algoritmo para resolver el PTCF. Spielberg identifica el PTCF como un caso particular de un problema de programación entero mixto (PPEM) estudiado por Jacques Benders [8], lo cual hace posible construir un algoritmo iterativo que consiste en resolver sucesiva y alternativamente problemas de transporte y de programación entera.

Para permitir una mejor asociación entre el PPEM y el PTCF, Spielberg escribe este último problema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} && -(cX + qY) \\ & \text{sujeto a} && AX \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i, & i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, & j = 1, \dots, n \end{cases} \\ & && X \leq MY \\ & && \Psi Y = Y \\ & && X, Y \geq 0 \end{aligned}$$

donde $Y = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{mn})^t$, M y Ψ son las siguientes matrices diagonales

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & & & \\ & m_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{mn} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} y_{11} & & & \\ & y_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & y_{mn} \end{pmatrix}$$

y $m_{ij} = \min(s_i, d_j)$.

Notemos que, en esta formulación, se ha multiplicado por -1 la función objetivo. Además, se ha debilitado ligeramente la restricción de la oferta y la demanda, ya que al ser una desigualdad, permitimos que el origen i no tenga que distribuir toda su oferta y el destino j pueda recibir más que su demanda inicial (demanda mínima).

De forma análoga a como hemos hecho en la sección 2.4, se puede comprobar fácilmente que la segunda y la tercera restricción fuerzan a que se cumplan las restricciones sobre las variables y_{ij} .

El PPEM se formula como:

$$\max \{ \gamma' X + f(Y) \mid \tilde{A}X + E(Y) \leq a, X \geq 0, Y \in S \}$$

donde S es un conjunto cerrado y acotado de vectores. Para su resolución, se consideran los siguientes problemas auxiliares

$$\max \left\{ x_0 \mid \begin{pmatrix} x_0 \\ Y \end{pmatrix} \in G \right\} \quad (2.7)$$

con $G = \cap \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ Y \end{pmatrix} \mid u_0 x_0 + u^t E(Y) - u_0 f(Y) \leq u^t a, (u_0, u)^t \in C, Y \in S \right\}$, y

$$\max \{ \gamma' X \mid \tilde{A}X \leq a - E(\bar{Y}), X \geq 0 \} \quad (2.8)$$

donde x_0 , u_0 son escalares, u es un vector columna, \bar{Y} es un vector Y solución del primer problema (2.7), y

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} u_0 \\ u \end{pmatrix} \mid \tilde{A}^t u - \gamma u_0 \geq 0, u \geq 0, u_0 \geq 0 \right\}$$

La razón de considerar estos dos problemas es que, si tenemos (\bar{x}_0, \bar{Y}) solución óptima de (2.7), entonces (2.8) es factible, y su solución óptima es \bar{X} , con $\gamma^t \bar{X} = \bar{x}_0 - f(\bar{Y})$. Además, (\bar{X}, \bar{Y}) es solución óptima del PPEM. Por lo tanto, este problema se reduce a estudiar estos dos problemas auxiliares.

Benders demostró que G se puede aproximar por una secuencia de $G(Q^k)$, $k = 0, 1, \dots$, donde

$$G(Q^k) = \cap \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ Y \end{pmatrix} \mid u_0 x_0 + u^t E(Y) - u_0 f(Y) \leq u^t a, (u_0, u)^t \in Q^k \subset C, Y \in S \right\}$$

El paso 0 comienza con un subconjunto Q^0 de C cualquiera.

A continuación, con el objetivo de resolver el PPEM, consideramos, en el paso k , el problema

$$\max \left\{ x_0 \mid \begin{pmatrix} x_0 \\ Y \end{pmatrix} \in G(Q^k) \right\} \quad (2.9)$$

análogo al problema (2.7), cuya solución óptima denotamos $\begin{pmatrix} x_0^k \\ Y^k \end{pmatrix}$. Esta solución óptima existe si el problema original tiene solución óptima. A continuación, se resuelve el problema

$$\max \{ \gamma^t X \mid \tilde{A}X \leq a - E(Y^k), X \geq 0 \} \quad (2.10)$$

análogo al problema (2.8), o su correspondiente dual

$$\min \{ (a - E(Y^k))^t u \mid \tilde{A}^t u \geq \gamma, u \geq 0 \} \quad (2.11)$$

El problema dual es un problema factible. En cuanto al problema (2.10), caben dos posibilidades (notemos que estamos en el paso k):

1. Es factible. En tal caso, los dos problemas, (2.10) y (2.11), tienen solución óptima finita, X^k, u^k , respectivamente. Consideramos la función

$$F^k \equiv F(u^k, x_0^k, Y^k) = x_0^k - f(Y^k) - (a - E(Y^k))^t u^k$$

Se puede demostrar, observando que $G \subset G(Q^k)$, que $F^k \geq 0$.

Si $F^k = 0$, acaban las iteraciones y la solución del PPEM es $X = X^k$ e $Y = Y^k$.

Si, por el contrario, $F^k > 0$, entonces se considera $Q^{k+1} = Q^k \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ u^k \end{pmatrix} \right\}$, y se va al paso $k+1$.

2. No es factible. Como el problema dual es factible, entonces ha de ser no acotado. Aplicando el método simplex, obtenemos \hat{u}^k vértice de P y \tilde{u}^k dirección extrema de C_0 , donde $P = \{u \mid \tilde{A}^t u \geq \gamma, u \geq 0\}$ y $C_0 = \{u \mid \tilde{A}^t u \geq 0, u \geq 0\}$.

Si $F(\hat{u}^k, x_0^k, Y^k) \leq 0$, se considera $Q^{k+1} = Q^k \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{u}^k \end{pmatrix} \right\}$, y se va al paso $k+1$.

Si $F(\hat{u}^k, x_0^k, Y^k) > 0$, se considera $Q^{k+1} = Q^k \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{u}^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{u}^k \end{pmatrix} \right\}$, y se va al paso $k+1$.

Benders [8] demostró que el número de iteraciones necesarias para pasar de Q^k a Q^{k+1} es finito, por lo que el procedimiento termina con una solución del PPEM.

Examinando el PTCF, podemos observar que es un caso particular del PPEM, sin más que tomar

$$\begin{aligned}
\gamma^t &= -c, \quad f(Y) = -qY \\
\tilde{A} &= \begin{pmatrix} A \\ I_{mn} \end{pmatrix} \\
E(Y)^t &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{m+n}, -m_{11}y_{11}, \dots, -m_{mn}y_{mn}) \\
a^t &= (b^t, \underbrace{0, \dots, 0}_{mn})
\end{aligned}$$

La restricción $\Psi Y = Y$ se incluye al restringir el dominio de los vectores Y, S , a vectores de componentes 0 ó 1. Las variables duales las expresamos como $u^t = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n, w_{11}, \dots, w_{mn})$. Así pues, los conjuntos C y $G(Q^k)$ pueden escribirse como

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} u_0 \\ u \end{pmatrix} \mid u_i - v_j + w_{ij} + u_0 c_{ij} \geq 0; u_i, v_j, w_{ij}, u_0 \geq 0, \forall i, j \right\}$$

$$G(Q^k) = \cap \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ Y \end{pmatrix} \mid u_0 x_0 \leq -d(u_i, v_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij} (m_{ij} w_{ij} - q_{ij} u_0), (u_0, u_i, v_j, w_{ij})^t \in Q^k \right\}$$

$$\text{con } d(u_i, v_j) = -u^t a = \sum_{j=1}^n d_j v_j - \sum_{i=1}^m s_i u_i$$

Siguiendo los pasos descritos anteriormente para resolver el PPLEM, si estamos en el paso k , se empieza resolviendo el problema (2.9), cuya formulación es ahora la siguiente:

$$\max \left\{ x_0 \mid u_0^k x_0 \leq -d(u_i^k, v_j^k) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij} (m_{ij} w_{ij}^k - q_{ij} u_0^k), y_{ij} = 0, 1, k = 0, 1, \dots \right\}$$

Como se está resolviendo un problema de transporte, se debe imponer que $\sum_{i=1}^m s_i y_{ij} \geq d_j$ y $\sum_{j=1}^n d_j y_{ij} \geq s_i$, lo que restringe el dominio de S e Y , ya que la oferta total potencialmente disponible para cada destino debe, al menos, igualar su demanda, y cada origen puede enviar a lo sumo la totalidad de su oferta, respectivamente.

A continuación, se resuelve el problema (2.10), cuya formulación es la siguiente:

$$\max \{ -cX \mid AX \leq b, x_{ij} \leq m_{ij} y_{ij}^k, x_{ij} \geq 0 \} \quad (2.12)$$

Se puede interpretar como un problema de transporte en el que la ruta (i, j) está prohibida si $y_{ij}^k = 0$, ya que entonces $x_{ij} = 0$. Para resolver este problema, se le asocia un problema de transporte estándar en el que las rutas prohibidas tendrán un coste alto:

$$\max \{ -(c + M^k)^t X \mid AX \leq b, x_{ij} \geq 0 \} \quad (2.13)$$

donde $M_{ij}^k = M$ si $y_{ij}^k = 0$, y $M_{ij}^k = 0$ si $y_{ij}^k = 1$, siendo M una constante positiva suficientemente grande. Hay que considerar dos casos:

Caso 1: La solución óptima del problema (2.13) no depende de M . En este caso, esta es la solución del problema con rutas prohibidas (2.12). Resolviendo a su vez su problema dual, y aplicando la igualdad en las funciones objetivo del problema primal y del problema dual, se tienen todos los datos que permiten evaluar la función

$$F^k = x_0^k + d(u_i^k, v_j^k) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^k (q_{ij} - m_{ij} w_{ij}^k)$$

construir Q^{k+1} y pasar al paso $k+1$.

Caso 2: La solución del problema depende de M . En este caso, (2.12) no es factible. Por tanto, su dual es no acotado. Siguiendo el procedimiento descrito por Spielberg [24], se pueden obtener el vértice \hat{u}^k y la dirección extrema \hat{u}^k de no acotación. A continuación se construye Q^{k+1} y se pasa al paso $k+1$.

2.7. Un algoritmo basado en fijar las variables binarias

En 1968, Paul Gray, en su artículo "*Exact solution of the fixed-charge transportation problem*" [15], propone un método para encontrar una solución exacta al PTCF basado en fijar las variables enteras y resolver el problema de transporte asociado.

Consideremos la siguiente formulación del PTCF:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}x_{ij} + q_{ij}y_{ij}) \\
 &\text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 &&& \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 &&& x_{ij} \leq m_{ij}y_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\
 &&& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\
 &&& y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

con $m_{ij} = \min(s_i, d_j)$.

Supongamos que se han fijado los valores de las variables binarias y_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Sean estos valores \bar{y}_{ij} . El problema que resulta es un problema de transporte en el que la ruta (i, j) está prohibida si $\bar{y}_{ij} = 0$:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\
 &\text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 &&& \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, \dots, n \\
 &&& x_{ij} \leq m_{ij}\bar{y}_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\
 &&& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ya vimos en la sección 2.6 anterior como abordar este problema. Si el problema (2.14) no tiene solución factible para $\{\bar{y}_{ij}\}$ fijadas, entonces el PTCF tampoco la tiene para esos mismos valores de \bar{y}_{ij} . Si (2.14) tiene solución óptima $\{\bar{x}_{ij}\}$, entonces $\{\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}\}$ es una solución factible del PTCF.

Teniendo en cuenta estos comentarios, se puede proponer el siguiente algoritmo para calcular la solución exacta del PTCF:

Paso 1: Enumerar los posibles vectores $\bar{Y} = (\bar{y}_{11}, \dots, \bar{y}_{mn})$.

Paso 2: Resolver el problema (2.14) para cada \bar{Y} .

Paso 3: Para cada solución óptima del problema (2.14), calcular $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}\bar{x}_{ij} + q_{ij}\bar{y}_{ij})$. La solución óptima del PTCF es $\{\bar{x}_{ij}^0, \bar{y}_{ij}^0\}$ para la que el cálculo anterior es mínimo.

Este algoritmo no es eficiente desde el punto de vista del tiempo invertido en la resolución del problema, ya que el número de vectores \bar{Y} a considerar es muy grande, por lo que Gray calculó cotas

para la carga fija total de la solución óptima del PTCF con el fin de reducir el número de vectores \bar{Y} a considerar.

Supongamos que se tiene una solución factible del PTCF (por ejemplo, la que propone Balinski, descrita en la sección 2.4). Sea Z_0 el valor de su función objetivo. Sea Z_{min} el valor óptimo de la función objetivo del PTCF con cargas fijas nulas (se reduce a un problema de transporte ordinario). Entonces, $CF_{max} = Z_0 - Z_{min}$ es una cota superior de la carga fija total de la solución óptima del PTCF. Esta cota se puede mejorar ya que, fijando los $\{\bar{y}_{1j}\}$, para $j = 1, \dots, n$, y llamando Z_{min_1} al valor óptimo de la función objetivo del PTCF con las $\{\bar{y}_{1j}\}$ fijadas, tenemos que una cota superior mejorada es $Z_0 - Z_{min_1}$, ya que $Z_{min_1} \geq Z_{min}$. La cota se puede ir mejorando fijando sucesivos valores $\{\bar{y}_{ij}\}$.

Para reducir aún más el número de vectores \bar{Y} a considerar en el algoritmo anterior, se pueden usar las siguientes propiedades:

- La solución óptima del PTCF es un punto extremo (Teorema 2.3.2., sección 2.3), por lo que si $\{x_{ij}^0, y_{ij}^0\}$ es una solución óptima, el número de elementos no nulos de $\{x_{ij}^0\}$ es a lo sumo $m + n - 1$, y, por tanto, lo mismo le ocurre al número de elementos no nulos de $\{y_{ij}^0\}$.
- Como ya se ha señalado en la sección 2.6, $\sum_{j=1}^n d_j y_{ij} \geq s_i$, $i = 1, \dots, m$, y $\sum_{i=1}^m s_i y_{ij} \geq d_j$, $j = 1, \dots, n$.
- Debe haber al menos una ruta abierta a cada destino.
- Para cada destino abastecido por un único origen, puede eliminarse el destino del estudio y reducir la oferta del origen en la demanda del destino considerado. Para cada origen que abastece un único destino puede eliminarse dicho origen del estudio y reducir la demanda de ese destino en la oferta del origen considerado.

Utilizando estas últimas propiedades y las cotas antes calculadas, Gray desarrolla un algoritmo para reducir el número de vectores \bar{Y} a considerar, de manera que pudiera aplicarse el algoritmo presentado anteriormente y resolver el PTCF:

Inicialización:

- Paso 1': Reordenar los orígenes del PTCF en orden decreciente según su oferta.
- Paso 2': Para cada origen, calcular la demanda total para cada combinación de rutas abiertas. Si la oferta es mayor que la demanda en una combinación, entonces dicha combinación no es factible, y se le asigna una carga fija M , siendo M una constante suficientemente grande.
- Paso 3': Para el resto de combinaciones, calcular el coste fijo total asociado.
- Paso 4': Para cada origen, ordenar las combinaciones de destinos en orden creciente según su coste fijo total.
- Paso 5': Crear una tabla, representando los orígenes en las filas, las combinaciones de destinos en las columnas, y los costes fijos totales en cada casilla. La denotamos tabla de costes fijos.
- Paso 6': Para cada fila de la tabla de costes fijos, buscar la mayor carga fija total permitida, que se obtiene restando a CF_{max} la suma de las cargas fijas más pequeñas de las otras filas.

Acotación (supongamos que ya hemos aplicado esta parte para los primeros k orígenes):

- Paso 7': Resolver el PTCF con las rutas abiertas especificadas desde el origen 1 hasta el k , y con todas las rutas desde el origen $k + 1$ hasta el m abiertas.
- Paso 8': Calcular CF_{max} .

Iteración:

Paso 9': Tomar la siguiente combinación de los primeros $m - 1$ orígenes. Si $\sum_{i=1}^m s_i y_{ij} \geq d_j$, se pasa al Paso 10'. En caso contrario, se repite el Paso 9'.

Paso 10': Descartar las combinaciones en las que hay más de $m + n - 1$ rutas abiertas.

Paso 11': Determinar la factibilidad de las combinaciones observando si se cumplen las propiedades **b)** y **d)** anteriormente descritas.

Paso 12': Si una de las combinaciones es coherente con el valor de CF_{max} y cumple las propiedades **b)** y **d)**, se resuelve el PTCF con las rutas las rutas abiertas de esa combinación.

Paso 13': Abrimos la última ruta que no lo esté. Si la combinación no es coherente con el valor de CF_{max} , se vuelve al Paso 9', en otro caso, se vuelve al Paso 10'. Si no hay más combinaciones a considerar, el algoritmo acaba.

2.8. Revisión bibliográfica actualizada

Finalmente, en esta sección se incluye una revisión bibliográfica de trabajos recientes sobre el PTCF, ya que en la actualidad se siguen investigando nuevos métodos de resolución y reformulaciones del problema que permitan una resolución más rápida y eficiente.

En lo que se refiere a la formulación de algoritmos exactos para la resolución del problema caben destacar [2, 5, 18]. En [2] se desarrolla un algoritmo de ramificación y acotación con algunas modificaciones a la hora de excluir ramificaciones y limitar la solución a determinadas zonas. En [5] se estudia la proyección poliédrica de la estructura del PTCF en el espacio de las variables binarias asociadas, y se desarrolla un algoritmo computacionalmente eficiente. Por último, en [18] se propone un rápido algoritmo para resolver PTCF de pequeño tamaño, descomponiendo el problema en varios pequeños subproblemas. En un futuro, esta vía podría ser generalizada para problemas de mayores dimensiones.

Ante la dificultad en ocasiones de encontrar la solución óptima del PTCF, también han sido varias las investigaciones centradas en algoritmos heurísticos o aproximados [3, 4, 9, 19, 23, 26], que se basan, entre otros procedimientos, en técnicas de relajación lagrangiana, en algoritmos para resolver problemas de máximo flujo con mínimo coste, en algoritmos iterativos, o en los llamados algoritmos genéticos, que se basan en los procesos genéticos de los organismos vivos estudiados por Charles Darwin, y que están cobrando importancia en los últimos años.

Capítulo 3

Casos particulares y propiedades del problema de transporte con carga fija

3.1. El problema de transporte con carga fija puro

En 1989, Maud Gothë-Lundgren y Torbjörn Larsson estudiaron el problema de transporte con carga fija puro (PTCFP) en "*A set covering reformulation of the pure fixed charge transportation problem*" [14]. El objetivo de estos autores es reformular el problema como un problema de cubrimiento de conjuntos para aplicar técnicas de generación de restricciones, que se han probado útiles para resolver estos problemas.

El PTCFP es un caso particular del PTCF, en el que el coste lineal de las rutas (i, j) desaparece ($c_{ij} = 0$), por lo que su formulación es

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} y_{ij} \\ &\text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, m \\ &&& \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad j = 1, \dots, n \\ &&& y_{ij} = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad x_{ij} > 0 \\ &&& y_{ij} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad x_{ij} = 0 \\ &&& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como la nueva formulación del problema que se va a proponer va a depender sólo de las variables binarias y_{ij} , Gothë-Lundgren y Torbjörn estudian en primer lugar una nueva descripción de la región factible del problema (3.1).

La región factible de este problema puede escribirse implícitamente como

$$\mathcal{Y} = \left\{ Y \in \{0, 1\}^{mn} \mid X \geq 0 \text{ tal que } \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \text{ y } x_{ij} = 0 \text{ si } y_{ij} = 0, \forall i, j \right\}$$

El objetivo de los siguientes teoremas es reescribir \mathcal{Y} a partir, exclusivamente, de las variables binarias $\{y_{ij}\}$.

Teorema 3.1.1. *El problema de flujo a coste mínimo con ofertas s_i , $i = 1, \dots, m$, demandas d_j , $j = 1, \dots, n$, y capacidades sobre los arcos k_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ es factible si y sólo si*

$$\sum_{i=1}^m \min(s_i, \sum_{j \in L} k_{ij}) \geq \sum_{j \in L} d_j, \quad \forall L \subseteq \{1, \dots, n\}$$

Para la demostración de este teorema véase [12].

Consideramos ahora el PTCFP, en el que k_{ij} es infinito si $y_{ij} = 1$ y cero si $y_{ij} = 0$.

Teorema 3.1.2. *La región factible del PTCFP puede escribirse como*

$$\mathcal{Y} = \left\{ Y \in \{0, 1\}^{mn} \mid \sum_{i \in \bar{K}} \sum_{j \in L} y_{ij} \geq 1, \forall L \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ y } K \subseteq \{1, \dots, m\} \text{ tales que } \sum_{i \in K} s_i < \sum_{j \in L} d_j \right\}$$

con $\bar{K} = \{1, \dots, m\} - K$.

Demostración: Notemos que $\sum_{i=1}^m \min(s_i, \sum_{j \in L} k_{ij}) \leq \sum_{i \in K} s_i + \sum_{i \in \bar{K}} \sum_{j \in L} k_{ij}$, $\forall K \subseteq \{1, \dots, m\}$, dándose la igualdad para algún K . Por tanto, la condición del **Teorema 3.1.1** es equivalente a

$$\sum_{i \in \bar{K}} \sum_{j \in L} k_{ij} \geq \sum_{j \in L} d_j - \sum_{i \in K} s_i, \forall L \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ y } K \subseteq \{1, \dots, m\} \quad (3.2)$$

En consecuencia, si $\sum_{j \in L} d_j - \sum_{i \in K} s_i \leq 0$, la condición (3.2) se cumple trivialmente. Por el contrario, si $\sum_{j \in L} d_j - \sum_{i \in K} s_i > 0$, para que se cumpla la condición (3.2) ha de exigirse que al menos una de las rutas (i, j) , con $i \in \bar{K}$, $j \in L$, tenga $y_{ij} = 1$. Por tanto, la condición (3.2) puede sustituirse por la exigencia de que

$$\sum_{i \in \bar{K}} \sum_{j \in L} y_{ij} \geq 1, \forall L \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ y } K \subseteq \{1, \dots, m\}$$

□

Basándose en el **Teorema 3.1.2.**, el PTCFP puede reformularse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} y_{ij} \\ &\text{sujeto a} && \sum_{i \in \bar{K}} \sum_{j \in L} y_{ij} \geq 1, \forall L \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ y } K \subseteq \{1, \dots, m\} \text{ tales que } \sum_{i \in K} s_i < \sum_{j \in L} d_j \\ &&& y_{ij} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

La interpretación de las desigualdades en esta reformulación es muy simple: si la demanda total de un subconjunto de destinos L es mayor que la oferta total de otro subconjunto de orígenes K , entonces debe haber al menos un origen en \bar{K} que suministre a L .

El número de restricciones es muy grande en la nueva formulación del PTCFP. Sin embargo, estas pueden ser generadas usando algoritmos. Gothé-Lundgren y Larsson describen dos de ellos.

El primero es un método exacto basado en resultados previos de Benders [8]. Como ya hemos visto en la sección 2.6, en el PTCFP se cumplen las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n d_j y_{ij} &\geq s_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m s_i y_{ij} &\geq d_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Definición 3.1.3. *Para cada i , un subconjunto $J_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ se dice minimal si $\sum_{j \in J_i} d_j < s_i$ y*

$\sum_{j \in \bar{J}_i} d_j + d_k \geq s_i$ para cualquier $k \in J_i$, donde \bar{J}_i es el complementario de J_i .

Para el índice j , la definición del subconjunto minimal I_j es análoga.

Consideramos ahora el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} y_{ij} \\
& \text{sueto a} && \sum_{j \in J_i} y_{ij} \geq 1, \quad i = 1, \dots, m \\
& && \sum_{i \in I_j} y_{ij} \geq 1, \quad j = 1, \dots, n \\
& && y_{ij} \in \{0, 1\}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Como es un problema análogo a la reformulación del PTCFP pero relajado, el valor óptimo de su función objetivo es una cota inferior del valor óptimo de la función objetivo del PTCFP. Consideramos su solución óptima, Y^* , y el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar} && \sum_{(i,j) \in IJ^*} x_{ij} \\
& \text{sueto a} && \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& && \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq d_j, \quad j = 1, \dots, n \\
& && x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in IJ^* \\
& && x_{ij} = 0, \quad (i, j) \notin IJ^*
\end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $IJ^* = \{(i, j) \mid y_{ij}^* = 1\}$. Sea X^* su solución óptima, Gothé-Lundgren y Larsson demostraron que:

- Si la función objetivo del problema (3.4) evaluada en X^* es igual a $\sum_{i=1}^m s_i$, entonces Y^* es una solución factible del PTCFP, y (X^*, Y^*) es solución óptima de ese problema.
- Si, por el contrario, la función objetivo del problema (3.4) evaluada en X^* es estrictamente menor que $\sum_{i=1}^m s_i$, entonces Y^* no es solución factible del PTCFP y existe una restricción que podemos añadir al problema (3.3) para hallar una nueva Y^* con la que iterar el procedimiento.

Este procedimiento es costoso desde el punto de vista del tiempo computacional, por lo que Gothé-Lundgren y Larsson aplican, en un determinado momento, un método heurístico y el método de planos de corte con alguna modificación para resolver el problema (3.4).

El segundo algoritmo que propusieron Gothé-Lundgren y Larsson para calcular la solución óptima del PTCFP es una técnica heurística basada en los multiplicadores de Lagrange. Se puede consultar [14] para una descripción detallada del mismo.

Gothé-Lundgren y Larsson evaluaron los dos algoritmos computacionalmente, deduciendo que, si bien el segundo algoritmo es eficiente, el primero no lo es tanto si el PTCFP es grande, dado el gran número de iteraciones requeridas para obtener una primera solución factible del PTCFP.

3.2. El problema de asignación de profesores

En 1994, Tim Hultberg y Domingos Cardoso estudiaron un caso particular del PTCFP en su artículo "*The teacher assignment problem: A special case of the fixed charge transportation problem*" [17]. En él, reformulan el problema de asignación de profesores (PAP) para resolverlo más fácilmente que con los algoritmos generales del PTCF.

El PAP se puede interpretar como un problema en el que hay que minimizar el número total de asignaturas distintas que imparten unos profesores. El número de asignaturas es m , el número de profesores es n , x_{ij} es el número de horas que el profesor j imparte de la asignatura i , s_i es el número de horas necesarias de la asignatura i , y d_j el máximo número de horas que el profesor j puede impartir. Este problema puede formularse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij} \\
& \text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& && \sum_{i=1}^m x_{ij} + z_j = d_j, \quad j = 1, \dots, n \\
& && x_{ij} \leq s_i y_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\
& && z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
& && x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \\
& && y_{ij} \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

donde $y_{ij} = 1$ si $x_{ij} > 0$, $y_{ij} = 0$ si $x_{ij} = 0$, y z_j son variables de holgura.

No exigimos que cada profesor imparta todas sus horas disponibles, por eso se ha introducido la variable de holgura $z_j \geq 0$. Notemos que el PAP es un PTCFP en el que $q_{ij} = 1$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Sean $S = \sum_{i=1}^m s_i$, $D = \sum_{j=1}^n d_j$ y $Z = D - S$, obviamente, el PAP es factible si y sólo si $Z \geq 0$, por lo que a partir de ahora asumiremos que $Z \geq 0$. Denotando I y J a los conjuntos de valores que toman los índices i y j , respectivamente, observamos que un PAP queda determinado por la terna (I, J, Z) . Para dar una reformulación del PAP, necesitamos algunas definiciones.

Definición 3.2.1. La terna (I', J', Z') es un subproblema de (I, J, Z) si:

- 1) $I' \subseteq I$
- 2) $J' \subseteq J$
- 3) $0 \leq Z' \leq Z$
- 4) $(I', J', Z') \neq (\emptyset, \emptyset, 0)$

Un problema que sólo tiene como subproblema a él mismo se llama simple.

Definición 3.2.2. Un conjunto $\{(I_1, J_1, Z_1), (I_2, J_2, Z_2), \dots, (I_l, J_l, Z_l)\}$ es una partición de (I, J, Z) si:

- 1) (I_k, J_k, Z_k) es un subproblema de (I, J, Z) , $k=1, \dots, l$
- 2) Cada elemento de I está contenido en uno sólo de los conjuntos I_1, \dots, I_l
- 3) Cada elemento de J está contenido en uno sólo de los conjuntos J_1, \dots, J_l

Si todos los subproblemas de una partición son simples, dicha partición se dice maximal. Si denotamos $Sub(I, J, Z)$ al conjunto de todos los subproblemas de (I, J, Z) , $SimpleSub(I, J, Z)$ al conjunto de todos los subproblemas simples de (I, J, Z) , y $P^*(I, J, Z)$ a la partición de (I, J, Z) con mayor número de elementos, $l^*(I, J, Z)$, tenemos que $P^*(I, J, Z) \subseteq SimpleSub(I, J, Z) \subseteq Sub(I, J, Z)$.

Veamos a continuación que resolver el PAP es equivalente a calcular $l^*(I, J, Z)$.

Teorema 3.2.3. Si existe una partición de (I, J, Z) con l elementos, entonces existe una solución factible del PAP con valor en la función objetivo menor o igual que $m + n - l$.

Demostración: Sea $\{(I_1, J_1, Z_1), (I_2, J_2, Z_2), \dots, (I_l, J_l, Z_l)\}$ una partición de (I, J, Z) . Para cada $k = 1, \dots, l$, sea $\{X^k, Y^k\}$ una solución óptima del PAP (I_k, J_k, Z_k) . Ya vimos anteriormente que el número de elementos no nulos de X^k es menor o igual que $|I_k| + |J_k| - 1$. Definimos

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ y } j \text{ pertenecen a diferentes subproblemas} \\ x_{ij}^k & \text{si } i \text{ y } j \text{ pertenecen al mismo subproblema } (I_k, J_k, Z_k) \end{cases}$$

Esta es una solución factible del PAP, ya que, por ejemplo, $\sum_{j \in J} x_{ij} = \sum_{j \in J_k} x_{ij}^k = s_i$, $i \in I$ (las demás restricciones se cumplen análogamente). Además, el número de elementos no nulos de esta solución es menor o igual que $\sum_{k=1}^l (|I_k| + |J_k| - 1) = m + n - l$. Así, la función objetivo de esta solución es menor o igual que $m + n - l$.

□

Teorema 3.2.4. *Si existe una solución factible del PAP con valor en la función objetivo $m + n - l$, entonces existe una partición de (I, J, Z) con l elementos o más.*

Demostración: Sea $\{x_{ij}, y_{ij}\}$ una solución factible del PAP con valor en la función objetivo $m + n - l$. Consideramos el grafo $G = (I \cup J, A)$, con $A = \{(i, j) \mid y_{ij} = 1\}$. Su número de nodos (primera componente) es $m + n$, y su número de arcos (segunda componente) es $m + n - l$. Por tanto, debe haber al menos l componentes del grafo conectadas que inducen una partición de (I, J, Z) . \square

Corolario 3.2.5. *La solución óptima del PAP tiene valor en la función objetivo igual a $m + n - l^*(I, J, Z)$.*

Demostración: Por ser $l^*(I, J, Z)$ el mayor número de elementos de una partición de (I, J, Z) , y usando los teoremas 3.2.3 y 3.2.4, llegamos a que tenemos una partición de (I, J, Z) de $l^*(I, J, Z)$ elementos si y sólo si existe una solución factible del PAP con valor en la función objetivo igual a $m + n - l^*(I, J, Z)$, por lo que esta solución será óptima. \square

Una vez reformulado el PAP, Hultberg y Cardoso describen un algoritmo para resolverlo, que es una variante del algoritmo de ramificación y acotación. El método consiste en dividir la región factible del PAP en subconjuntos y utilizar cotas para descartar soluciones y subconjuntos.

1. Ramificación:

Se elige un subproblema (I', J', Z') de (I, J, Z) , y se divide la región factible en dos subconjuntos: el conjunto de particiones de (I, J, Z) que contienen a (I', J', Z') y el conjunto de particiones de (I, J, Z) que no contienen a (I', J', Z') .

Consideramos la siguiente relación de orden parcial:

$$(I_1, J_1, Z_1) <_{PAP} (I_2, J_2, Z_2) \text{ si } Z_1 < Z_2 \text{ y } \sum_{i \in I_1} s_i < \sum_{i \in I_2} s_i$$

2. Acotación:

Si $Z = 0$:

Sea $(I_{min}, J_{min}, Z_{min}) = \min (Sub(I, J, Z))$, con la relación de orden anterior. Entonces se tiene que

$$\left\lfloor \frac{\sum_{j \in J} d_j}{\sum_{j \in J_{min}} d_j} \right\rfloor$$

es una cota superior de $l^*(I, J, Z)$, ya que el denominador es la suma de los d_j del subproblema para el cual esa suma es la más pequeña (ya que $Z = 0$).

Si $Z > 0$:

Definimos $(I_z, J_z, z) = \min \{(I', J', Z') \in Sub(I, J, Z) \mid Z' = z\}$, con $z = 0, 1, \dots, Z$, y con la relación de orden definida anteriormente, se toma como cota superior de $l^*(I, J, Z)$ el valor óptimo de la función objetivo del siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && \sum_{z=0}^Z x_z \\ &\text{sujeto a} && \sum_{z=0}^Z D_z x_z \leq D \\ &&& \sum_{z=0}^Z z x_z \leq Z \\ &&& x_z \geq 0 \text{ entero, } z = 0, 1, \dots, Z \end{aligned}$$

donde $D_z = \sum_{j \in J_z} d_j$.

Finalmente, Hultberg y Cardoso analizaron el algoritmo computacionalmente, obteniendo resultados incluso mejores de los esperados en comparación con los algoritmos generales de resolución del PTCFP, pudiendo resolver problemas de tamaño considerablemente grande.

3.3. La paradoja de más por menos

En 1998, Veena Adlakha y Krzysztof Kowalski estudiaron la "paradoja" de más por menos (PMM) en el PTCF, en el artículo "On the fixed-charge transportation problem" [1].

La PMM ocurre cuando, en un problema de transporte, es posible enviar más unidades de producto por un coste menor o igual, siempre que enviemos la misma cantidad (o más) desde cada origen y hasta cada destino, y todos los costes de transporte sean no negativos. A pesar de no ser una paradoja, se denomina así por lo contraintuitiva que es la propiedad. En el sencillo ejemplo de problema de transporte de la Figura 3.1 podemos observar este hecho:

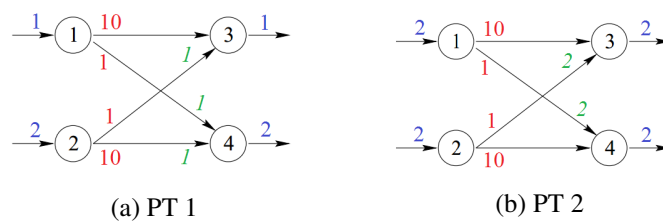


Figura 3.1: Ejemplo de PMM

En azul se representan la oferta y demanda de cada origen y destino, respectivamente, en rojo se representa el coste lineal de cada ruta, y en verde se representa la cantidad de producto enviado por cada ruta. El mínimo coste en el PT 1 es 12, y se envían en total tres unidades de producto. En el PT 2, en el que hemos aumentado la oferta del nodo 1 y la demanda del nodo 3, la solución óptima tiene un coste de 4 y se envían en total cuatro unidades de producto.

La PMM es una propiedad con importantes repercusiones económicas, tanto en el problema de transporte como en el PTCF, ya que es útil a la hora de incrementar las capacidades de las fábricas, de hacer fusiones, de llevar a cabo reducciones de personal, etc. Sin embargo, también puede conllevar el esfuerzo de intentar aumentar la demanda de un cierto mercado, ya que se tiene más oferta.

Para identificar una solución óptima "más por menos", Adlakha y Kowalski proponen un procedimiento basado en localizar los puntos absolutos del PTCF relajado, el PTR (véase la sección 2.4), ya que, usando las desigualdades (2.6), si tenemos una solución "más por menos" para el PTR, también es una solución "más por menos" para su PTCF asociado.

Definición 3.3.1. Un punto absoluto es una variable x_{ij} del problema transporte que debe ser positiva en cualquier solución óptima del problema, independientemente de los valores de s_i y d_j .

Para calcular los puntos absolutos en un PTCF, en [1] se propone el siguiente algoritmo:

Paso 1: Para cada $k = 1, \dots, m$, calcular $d_{ij}^k = C_{kj} - C_{ij}$, $i \neq k$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, donde $C_{ij} = c_{ij} + q_{ij}/m_{ij}$, $m_{ij} = \min(s_i, d_j)$.

Paso 2: Para cada matriz (d_{ij}^k) , calcular el mínimo valor e_i^k de cada fila, $i = 1, \dots, m$, $i \neq k$.

Paso 3: Calcular la matriz (d_{ij}^{k*}) , con $d_{ij}^{k*} = d_{ij}^k - e_i^k$.

Paso 4: Para cada $k = 1, \dots, m$, calcular $g_j^k = \sum_{i=1}^m d_{ij}^{k*}$.

Paso 5: a) Si $g_j^k \neq 0$, para cualquier j, k , entonces no hay puntos absolutos.

b) Si $g_j^k = 0$ para $k = q$ y $j = r$, entonces x_{qr} es un punto absoluto.

Una forma alternativa al algoritmo simplex para resolver el PTR es con la ayuda de los puntos absolutos. Cuando encontremos uno, x_{qr} , le asignamos el valor $\min(s_q, d_r)$. A continuación eliminamos del estudio la fila o columna cuya nueva oferta o demanda sea cero, y actualizamos d_r ó s_q , respectivamente. Por último, con el nuevo problema construimos su PTR, y volvemos a empezar.

Para encontrar una solución óptima "más por menos", Adlakha y Kowalski proponen el siguiente algoritmo:

Paso 1': Formular el PTR del PTCF actual.

Paso 2': Encontrar un punto absoluto del PTR, x_{qr} . Si no hay, ir al Paso 6'.

Paso 3': Asignar $x_{qr} = \max(s_q, d_r)$.

Paso 4': Eliminar del estudio la fila q o columna r correspondiente.

Paso 5': Volver al Paso 1'.

Paso 6': Resolver el PTR con el método simplex de transporte.

Notemos que es posible que el PTCF no tenga puntos absolutos, en cuyo caso ha de resolverse con un procedimiento general. Sin embargo, se ha observado que en problemas reales la probabilidad de encontrarlos aumenta considerablemente en comparación con problemas "artificiales".

Apéndice A

Resultados computacionales

Para finalizar este trabajo, se ha determinado el tiempo de resolución de varios PTCF generados aleatoriamente, resueltos con Lingo 12 con el procedimiento general de resolución de problemas de programación entera. En la [Tabla A.1](#) se muestran los resultados:

Tabla A.1: Solución de los PTCF

Nº de problema	Orígenes	Destinos	Dimensión	Valor óptimo de la función objetivo	Tiempo de CPU
1	6	20	120	21533	0 seg
2	6	40	240	79885	0 seg
3	10	50	500	53216	0 seg
4	10	100	1000	177220	1 seg
5	15	50	750	48163	0 seg
6	15	100	1500	123720	2 seg
7	20	100	2000	105553	5 seg
8	20	200	4000	324682	29 seg
9	25	100	2500	89482	2 seg
10	25	200	5000	256527	16 seg
11	30	60	1200	38890	1 seg
12	30	100	3000	87238	2 seg
13	40	100	4000	68154	1 seg
14	40	200	8000	193185	56 min 22 seg
15	70	100	7000	52460	4 seg
16	70	200	14000	141395	2 min 52 seg

Las características del ordenador utilizado para resolver los PTCF son: PC Intel Core CPU de 2.4 GHz con 4 GB de RAM en Windows 7.

Si m es el número de orígenes y n es el número de destinos en los PTCF, las características de estos problemas son:

- Se eligen m orígenes y n destinos distribuidos aleatoriamente por el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.
- La demanda de cada destino es un número aleatorio entre $dMin = 10$ y $dMax = 30$.
- La capacidad de los almacenes es un número aleatorio entre $cMin = (3 \cdot dMin \cdot n)/m$ y $cMax = (3 \cdot dMax \cdot n)/m$.
- El coste variable entre el origen i y el destino j se calcula como $[(10 + 100 \cdot d(i, j))]$, donde $d(i, j)$ es la distancia euclídea entre i y j , y $[\cdot]$ es la función parte entera.

- El coste fijo de cada arco se calcula como un número aleatorio entre 2 y 3 por la capacidad de arco correspondiente.

En la [Tabla A.1](#) se observa que el tiempo invertido en resolver un PTCF es muy pequeño para problemas de dimensión menor que 8000, e inapreciable para problemas hasta dimensión 1000. Los dos PTCF que más han tardado en resolverse son los dos que más destinos tienen: 8000 y 14000, siendo el primero de ellos el que más tiempo le ha costado.

Bibliografía

- [1] **Adlakha, V.; Kowalski, K.:** On the fixed-charge transportation problem, *Omega, The International Journal of Management Science* **27** (1999), 381-388.
- [2] **Adlakha, V.; Kowalski, K., Lev, B.:** A branching method for the fixed charge transportation problem, *Omega, The International Journal of Management Science* **38** (2010), 393-397.
- [3] **Adlakha V.; Kowalski K., Vemuganti R.R.:** Heuristic algorithms for the fixed-charge transportation problem, *Opsearch* **43** (2006), 132-151.
- [4] **Adlakha V.; Kowalski K., Wang S., Lev B., Shen W.:** On approximation of the fixed charge transportation problem, *Omega, The International Journal of Management Science* **43** (2014), 64-70.
- [5] **Agarwal Y.; Aneja Y.:** Fixed-charge transportation problem: Facets of the projection polyhedron, *Operations Research* **60** (2012), 638-654.
- [6] **Balinski, M.L.:** Fixed-cost transportation problems, *Naval Research Logistics Quarterly* **8** (1961), 41-54.
- [7] **M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis, H.D. Sherali,** *Linear programming and network flows*, John Wiley & Sons Inc, 3ª edición, 2005.
- [8] **Benders, J.F.:** Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems, *Numerische Mathematik* **4** (1962), 238-252.
- [9] **Buson E., Roberti R., Toth P.:** A reduced-cost iterated local search heuristic for the fixed-charge transportation problem, *Operations Research* DOI: <http://dx.doi.org/10.1287/opre.2014.1288> (próximo a aparecer) (2014), 1-12.
- [10] **G.B. Dantzig; M.N. Thapa,** *Linear programming. I: Introduction*, Springer, 1ª edición, 1997.
- [11] **C.A. Floudas; P.M. Pardalos,** *Encyclopedia of Optimization*, Springer, 2ª edición, 2009.
- [12] **L.R. Ford; D.R. Fulkerson,** *Flows in networks*, Princeton University Press, 1ª edición, 1962.
- [13] **R. Garfinkel; G.L. Nemhauser,** *Integer programming*, John Wiley & Sons Inc, 1ª edición, 1972.
- [14] **Göthe-Lundgren, M.; Larsson, T.:** A set covering reformulation of the pure fixed charge transportation problem, *Discrete Applied Mathematics* **48** (1994), 245-259.
- [15] **Gray, P.:** Exact solution of the fixed-charge transportation problem, *Operations Research* **19** (1971), 1529-1538.
- [16] **Hirsch, W.M.; Dantzig G.B.:** The fixed charge problem, *Naval Research Logistics Quarterly* **15** (1968), 413-424.

- [17] **Hultberg, T.H.; Cardoso, D.M.:** The teacher assignment problem: A special case of the fixed charge transportation problem, *European Journal of Operational Research* **101** (1997), 463-473.
- [18] **Kowalski K., Lev B., Shen W., Tu Y.:** A fast and simple branching algorithm for solving small scale fixed-charge transportation problem, *Operations Research Perspectives*, **1** (2014), 1-5.
- [19] **Lotfi M.M., Tavakkoli-Moghaddam R.:** A genetic algorithm using priority-based encoding with new operators for fixed charge transportation problems, *Applied Soft Computing*, **13** (2013), 2711-2726.
- [20] **K. Murty,** *Linear and combinatorial programming*, John Wiley & Sons Inc, 1ª edición, 1976.
- [21] **G.L. Nemhauser; L.A. Wolsey,** *Integer and combinatorial optimization*, John Wiley & Sons Inc, 1ª edición, 1999.
- [22] **Roberts, P.; Cooper, L.:** A study of the fixed charge transportation problem, *Computers and Mathematics with Applications* **2** (1976), 125-135.
- [23] **Sáez Aguado J.:** Fixed charge transportation problems: a new heuristic approach based on Lagrangean relaxation and the solving of core problems, *Annals of Operations Research*, **172** (2009), 45-69.
- [24] **Spielberg, K.:** On the fixed charge transportation problem, *Proceedings of the 1964 19th ACM National Conference* (1964), 11.101-11.1013.
- [25] **L.A. Wolsey,** *Integer programming*, John Wiley & Sons Inc, 1ª edición, 1998.
- [26] **Xie F.; Jia R.:** A heuristic algorithm for solving fixed-charge transportation problem, *In proceeding of: 2009 WRI World Congress on Computer Science and Information Engineering*, **2** (2009), 574-580.